Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen

31 Augustus 2007, 9.00-12.00 uur.

Voor de opgave 1 t/m 3 zijn maximaal 2 punten per opgave te behalen; voor 4-5 max. 1.5 punt/opgave. Totaal: 9 + 1 (gratis) punten. Dit is een gesloten boek tentamen. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes!

1. Beschouw de p.d.v.

$$xu_x + u_y = 1$$

   (a) Neem

$$u(x, y = 0) = \mathrm{e}^x$$

   en los het bovenstaande probleem op.

   (b) Bestaat er een beginvoorwaarde gegeven op een kromme $y = y(x)$ waarvoor de methode der karakteristieken geen oplossing van de bovenstaande pdv levert? Zo ja, geef een beginkromme/-voorwaarde; zo nee motiveer.

2. Bereken de oplossing $u(x,t)$ van

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in (-1,1) \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 1 \qquad x \in (-1,1)$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0 \qquad t > 0$$

3. De Sturm-Liouville differentiaaloperator L wordt gegeven door

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y$$

   waarbij $0 < x < 1$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Laat deze operator werken op functies $y(x)$ die voldoen aan de randvoorwaarden $y(0) - \alpha y'(0) = 0$ en $y(1) + \beta y'(1) = 0$, waarbij de constantes α en β groter dan nul zijn.

   (a) Bewijs dat (onder deze randvoorwaarde) de operator L positief is, d.w.z.

$$\int_0^1 uLu dx > 0 \quad \text{als} \quad u \neq 0.$$

   (b) Bewijs dat L zelf-geadjungeerd is,d.w.z

$$\int_0^1 uLv dx = \int_0^1 vLu dx$$

   (voor alle u en v die aan de gegeven randvoorwaarden voldoen).

4. Voor $T > 0$ beschouwen we $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$. Neem aan dat $u(x,t)$ voor $(x,t) \in Q_T$ voldoet aan de ongelijkheid

$$u_t - a(x,t)u_{xx} - b(x,t)u_x < 0$$

waarbij $a(x,t) \geq 0$ in Q_T. Toon aan dat $u(x,t)$ geen lokaal maximum kan aannemen in Q_T.

5. Bepaal de Greensche functie van het probleem

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad x \in (\alpha, \beta)$$

met $u(\alpha) = u_\alpha$ en $u(\beta) = u_\beta$.